PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 6

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLÈME

On note $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, 2π-périodiques, continues par morceaux et dont la valeur en tout point est la demi-somme des limites à gauche et à droite en ce point. On rappelle que l'application qui, à tout couple (f, g) d'éléments de $\mathcal{D}$, associe le nombre complexe $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$ est un produit scalaire hermitien dont on note N_2 la norme associée.

Pour tout élément p de $\mathbb{Z}$, on note e_p la fonction $t \mapsto e^{ipt}$. Pour tout élément f de $\mathcal{D}$ et pour tout p de $\mathbb{Z}$, le p-ième coefficient de Fourier de f est défini par

$$c_p(f) = \langle e_p, f\rangle$$

et, pour tout entier naturel k, on note $S_k(f)$ la somme partielle de la série de Fourier de f définie par :

$$S_k(f) = \sum_{p=-k}^{k} c_p(f)\, e_p .$$

Le sous-espace vectoriel $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$ constitué des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, 2π-périodiques, continues sur $\mathbb{R}$, est muni de sa structure d'algèbre usuelle et de la norme N_∞ définie par $N_\infty(f) = \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|$. On désigne par $\mathcal{P}$ la sous-algèbre de $\mathcal{C}$ engendrée par les fonctions e_p, où p décrit $\mathbb{Z}$; les éléments de $\mathcal{P}$ sont appelés polynômes trigonométriques.

On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'espace vectoriel des suites $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes telles que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_p$ soit absolument convergente, c'est-à-dire telles que l'ensemble des sommes partielles $\sum_{p=-k}^{k} |\alpha_p|$ soit borné.

Pour tout élément $a = (\alpha_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ de $\ell^1(\mathbb{Z})$, on pose :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_p = \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_p + \sum_{p=1}^{+\infty} \alpha_{-p}$$

et
$$N_1(a) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\alpha_p| = \sup_{k\geq 0} \left(\sum_{p=-k}^{p=k} |\alpha_p| \right).$$

L'application N_1 ainsi définie de $\ell^1(\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{R}$ est une norme.

L'objectif du problème est d'étudier quelques propriétés de la sous-algèbre A de $\mathcal{C}$ constituée des éléments f de $\mathcal{C}$ dont la série des coefficients de Fourier est absolument convergente ; on se propose, en particulier, d'établir que, pour tout élément f de A qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction $\frac{1}{f}$ appartient à A.

I. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DE A

1. ***Propriétés algébriques.***

a. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ contenant $\mathcal{P}$. Établir que l'application $f \mapsto \|f\| = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_p(f)|$ est une norme sur A.

b. Stabilité par conjugaison.
Soit f un élément de $\mathcal{C}$. Comparer $c_p(\overline{f})$ et $c_{-p}(f)$, où $\overline{f}$ désigne la fonction conjuguée de f.
En déduire que, si f appartient à A, $\overline{f}$ appartient également à A ; comparer alors $\|f\|$ et $\|\overline{f}\|$.

c. Stabilité par translation.

Pour tout nombre réel s et pour tout élément f de $\mathscr{C}$, on note $T_s f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $T_s f(t) = f(t - s)$.

Prouver que $T_s f$ appartient encore à $\mathscr{C}$ et comparer, pour tout entier p de $\mathbb{Z}$, $c_p(T_s f)$ et $c_p(f)$.

En déduire que si f est élément de A, $T_s f$ l'est aussi ; comparer alors $\|f\|$ et $\|T_s f\|$.

2. ***Structure de l'espace vectoriel normé*** A.

a. Soit $a = (\alpha_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ un élément de $\ell^1(\mathbb{Z})$. Prouver que la suite des polynômes trigonométriques :

$$\varphi_k = \sum_{p=-k}^{p=k} \alpha_p e_p$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers un élément de A noté $\varphi(a)$ et que, pour tout élément p de $\mathbb{Z}$, $c_p(\varphi(a)) = \alpha_p$.

En déduire que $\|\varphi(a)\| = N_1(a)$.

b. Prouver que l'application φ ainsi définie est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\ell_1(\mathbb{Z})$ sur l'espace vectoriel A.

3. ***Convergence de la série de Fourier d'un élément de*** A.

a. Prouver que, pour tout élément f de A, les sommes partielles $S_k(f)$ convergent vers f dans A, autrement dit que $\|f - S_k(f)\|$ tend vers zéro lorsque k tend vers $+\infty$.

b. Déduire de la question 2 que tout élément f de A est développable en série de Fourier. Plus précisément, on prouvera que les sommes partielles de la série de Fourier de f convergent vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.

c. Prouver que, pour tout f élément de A, $N_\infty(f) \leqslant \|f\|$.

4. ***Appartenance à*** A ***des fonctions continues de classe*** C^1 ***par morceaux.***

Soit f un élément de $\mathscr{C}$ de classe C^1 par morceaux. On prolonge la dérivée de f en un élément unique de $\mathscr{D}$ que l'on note f'.

a. Vérifier que, pour tout élément p de $\mathbb{Z}$, $c_p(f') = ip\,c_p(f)$; on utilisera une subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ de $[-\pi, +\pi]$ telle que f' soit continue sur chacun des intervalles partiels.

b. En déduire que f appartient à A.

c. Prouver qu'il existe une constante $\beta > 0$ telle que, pour tout élément f de $\mathscr{C}$ de classe C^1 par morceaux,

$$\|f\| \leqslant |c_0(f)| + \beta N_2(f').$$

5. ***Inclusion stricte de*** A ***dans*** $\mathscr{C}$.

Dans cette question, on *admet* que, pour toute suite décroissante $(\varepsilon_q)_{q\geqslant 1}$ de nombres réels positifs convergeant vers 0, la série $\sum_{q=1}^{+\infty} \varepsilon_q \frac{\sin qt}{q}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

a. Prouver que la somme f de cette série est dans $\mathscr{C}$.

b. Expliciter la condition nécessaire et suffisante portant sur (ε_q) pour que f soit élément de A.

c. Donner un exemple d'élément f de $\mathscr{C}$ qui n'appartient pas à A.

6. ***Stabilité de*** A ***par multiplication.***

Soit (f, g) un couple d'éléments de A.

a. En utilisant le développement en série de Fourier de f, prouver que, pour tout élément p de $\mathbb{Z}$,

$$c_p(fg) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_q(f)\, c_{p-q}(g),$$

la série du second membre étant absolument convergente.

b. Établir que, pour tout entier naturel k,

$$\sum_{p=-k}^{p=k} |c_p(fg)| \leqslant \|f\|\,\|g\|.$$

c. En conclure que la fonction fg appartient à A et que $\|fg\| \leqslant \|f\|\,\|g\|$. En particulier A est une sous-algèbre unitaire de l'algèbre $\mathscr{C}$.

d. En déduire que, pour tout entier naturel m et pour tout élément f de A, $\|f^m\| \leqslant \|f\|^m$.

II. ÉTUDE DE LA CONVERGENCE DANS A

1. ***Stabilité de*** A ***par passage à la limite.***

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A satisfaisant aux deux conditions suivantes :

- la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f de $\mathscr{C}$;
- il existe un nombre réel $M > 0$ tel que, pour tout entier n, $\|f_n\| \leqslant M$.

a. Prouver que, pour tout élément p de $\mathbb{Z}$, $\lim_{n\to+\infty} c_p(f_n) = c_p(f)$.

b. En déduire que, pour tout entier $k \geqslant 0$, $\sum_{p=-k}^{p=k} |c_p(f)| \leqslant M$.

c. Prouver que f est un élément de A et que $\|f\| \leqslant M$.

2. ***Convergence des séries dans*** A.

Soient $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs tels que $\sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_m$ soit convergente et $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle que $\|u_m\| \leqslant \alpha_m$ quel que soit l'entier naturel m. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$f_n = \sum_{m=0}^{m=n} u_m.$$

a. À l'aide de la majoration prouvée dans I. 3.*c.*, prouver que la suite (f_n) converge uniformément vers un élément f de $\mathscr{C}$.

b. Déduire de la question II. 1. que f est un élément de A et que $\|f\| \leqslant \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_m$.

c. Prouver que, pour tout couple (n, r) d'entiers positifs,

$$\|f_{n+r} - f_n\| \leqslant \sum_{m=n+1}^{+\infty} \alpha_m$$

et en déduire que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$, autrement dit, que (f_n) converge vers f dans A.

3. ***Application à l'inversibilité dans*** A.

Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.

a. Montrer que la fonction $e_0 - u$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

b. Prouver que la série de fonctions $\sum_{m=0}^{+\infty} u^m$ converge dans A vers un élément de A, noté v.

c. Prouver que $(e_0 - u)\, v = e_0$; en particulier la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1 - u(t)}$ est un élément de A.

III. CARACTÈRES DE A

On appelle caractère de l'algèbre A toute forme linéaire χ non nulle sur l'espace vectoriel A telle que, pour tout couple (f, g) d'éléments de A, $\chi(fg) = \chi(f)\,\chi(g)$. Pour tout élément θ de $]-\pi, +\pi]$ on note χ_θ le caractère de A défini par $\chi_\theta(f) = f(\theta)$. Dans cette partie, on se propose de démontrer que l'application $\theta \longmapsto \chi_\theta$ est une bijection de $]-\pi, \pi]$ sur l'ensemble des caractères de A.

1. ***Valeur d'un caractère sur un élément inversible de*** A.

Soit χ un caractère de A.

a. Prouver que $\chi(e_0) = 1$.

b. Prouver que si f est un élément de A inversible dans A, $\chi(f) \neq 0$.

2. ***Continuité d'un caractère.***

Soit χ un caractère de A.

a. Prouver que, pour tout élément g de A tel que $\|g\| \leqslant 1$, $|\chi(g)| \leqslant 1$. On pourra raisonner par l'absurde en supposant $|\chi(g)| > 1$ et en prouvant qu'alors la fonction $f = e_0 - \dfrac{g}{\chi(g)}$ serait inversible dans A.

b. En déduire que la forme linéaire χ est continue sur A.

3. ***Restriction d'un caractère à l'algèbre*** $\mathscr{P}$.

Soit χ un caractère de A.

a. Soit p un élément de $\mathbb{Z}$; prouver que $|\chi(e_p)| \leqslant 1$.
En déduire que $|\chi(e_p)| = 1$; en particulier, il existe un élément unique θ de $]-\pi, \pi]$ tel que $\chi(e_1) = e^{i\theta}$.

b. Prouver dans ces conditions que, pour tout polynôme trigonométrique P, $\chi(P) = P(\theta) = \chi_\theta(P)$.

4. ***Structure des caractères de*** A.

Prouver enfin que l'application $\theta \longmapsto \chi_\theta$ est une bijection de $]-\pi, +\pi]$ sur l'ensemble des caractères de A.

IV. CARACTÉRISATION DES ÉLÉMENTS INVERSIBLES DE A

Dans cette partie, on se propose de prouver que, pour tout f élément de A ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, la fonction $\dfrac{1}{f}$ appartient encore à A. À cet effet, on effectue une étude locale d'un tel élément f. On prouve ensuite que $\dfrac{1}{f}$ coïncide localement avec un élément de A. On montre enfin que $\dfrac{1}{f}$ appartient à A.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note φ_n la fonction 2π-périodique paire définie sur $[0, \pi]$ par :

$$\varphi_n(t) = 1 - \frac{nt}{\pi} \quad \text{si} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right]$$

$$\varphi_n(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \in \left[\frac{\pi}{n}, \pi\right].$$

Soit enfin ψ_n la fonction définie par $\psi_n = 2\,\varphi_n - \varphi_{2n}$.

1. ***Propriétés élémentaires des fonctions*** φ_n ***et*** ψ_n.

a. Prouver que, pour tout $n \geqslant 1$, les fonctions φ_n et ψ_n sont continues et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

b. Représenter graphiquement, pour $n = 4$, les fonctions φ_n, ψ_n, φ'_n, ψ'_n.

Montrer que, pour tout n, $0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1$, $0 \leqslant \psi_n \leqslant 1$ et $\psi_n(t) = 1$ si $t \in \left[-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right]$.

Calculer $N_\infty(\varphi_n)$ et $N_\infty(\varphi'_n)$.

c. Développer φ_n en série de Fourier et, en utilisant la positivité des coefficients de Fourier, montrer que :

$$\|\varphi_n\| = \varphi_n(0) = 1.$$

En déduire que $\|\psi_n\| \leqslant 3$.

2. ***Étude locale d'un élément de*** A ***de classe*** C^1 ***nul au point 0.***

Soit h un élément de A, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ tel que $h(0) = 0$. On se propose, en appliquant la majoration de I.4.*c.*, de prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|\varphi_n h\| = 0$.

a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\varphi_n h$ est un élément de A, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

b. Prouver que, pour tout $n \geqslant 1$, $|c_0(\varphi_n h)| \leqslant \frac{1}{n} N_\infty(h)$.

c. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $N_2((\varphi_n h)') \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} N_\infty((\varphi_n h)')$.

d. Établir que $(\varphi_n h)' = \varphi'_n h + \varphi_n h'$. En déduire qu'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $N_\infty((\varphi_n h)') \leqslant \delta$. Pour majorer $N_\infty(\varphi'_n h)$, on utilisera, après en avoir prouvé l'existence, une fonction w continue sur $[-\pi, +\pi]$ telle que $h(x) = x w(x)$ pour $x \in [-\pi, +\pi]$.

e. Prouver finalement que la suite $(\varphi_n h)$ converge vers 0 dans A.

3. ***Étude locale d'un élément de*** A ***nul au point 0.***

Soit g un élément de A tel que $g(0) = 0$.

a. En utilisant le développement de Fourier de g, construire une suite (P_k) de polynômes trigonométriques telle que, pour tout $k \geqslant 0$, $P_k(0) = 0$, et $\lim\limits_{k \to +\infty} \|g - P_k\| = 0$.

b. Établir que, pour tout couple d'entiers (k, n) où $k \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$, $\|\varphi_n g\| \leqslant \|g - P_k\| + \|\varphi_n P_k\|$.

c. Prouver enfin que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|\varphi_n g\| = 0$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|\psi_n g\| = 0$.

4. ***Coïncidence locale de la fonction*** $\frac{1}{f}$ ***avec un élément de*** A.

Soit f un élément de A ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. Pour tout s dans $[-\pi, +\pi]$, on pose $g_s = T_{-s}\left(e_0 - \frac{f}{f(s)}\right)$.

a. Prouver que g_s est un élément de A et que $g_s(0) = 0$.

En déduire qu'il existe un entier n_s tel que $\|\psi_{n_s} g_s\| < 1$. On pose alors $u_s = T_s(\psi_{n_s} g_s)$.

b. Prouver que la fonction $f_s = f(s)(e_0 - u_s)$ est, quel que soit s, un élément de A et que cet élément est inversible dans A. Prouver enfin que, pour tout élément t de $\left[s - \frac{\pi}{2n_s}, s + \frac{\pi}{2n_s}\right]$, $f_s(t) = f(t)$.

5. ***Appartenance de la fonction*** $\frac{1}{f}$ ***à*** A.

Soit f un élément de A ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

a. Prouver qu'il existe une suite $(s_1, s_2, \ldots, s_N)$ d'éléments de $[-\pi, \pi]$, des éléments $f_1, f_2, \ldots, f_N$ de A inversibles dans A et un entier $n \geqslant 1$ tels que

$$[-\pi, \pi] \subset \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant N} \left]s_j - \frac{\pi}{2n},\ s_j + \frac{\pi}{2n}\right[$$

et que, pour tout entier j compris entre 1 et N et pour tout élément t de $\left[s_j - \frac{\pi}{2n},\ s_j + \frac{\pi}{2n}\right]$, $f(t) = f_j(t)$.

b. Pour tout entier j compris entre 1 et N, on pose $\omega_j = T_{-s_j}(\psi_n)$.

Prouver que $\omega = \sum_{j=1}^{N} \omega_j$ est une fonction continue de classe C^1 par morceaux et que $\omega(t) > 0$ pour tout nombre réel t. En déduire que, pour tout j, la fonction $\pi_j = \frac{\omega_j}{\omega}$ appartient à A et que $\sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1$.

c. Prouver que $\frac{1}{f} = \sum_{j=1}^{N} \pi_j \frac{1}{f}$.

En conclure que f est inversible dans A.